¿Lógica Combinatoria o Teoría Estándar de Conjuntos?

por Lorenzo Peña

[publicado en ***Arbor*** nº 520 (abril 1989)

págªs 33-73

ISSN 0210-1963]

Índice

0.— Preámbulo

1.— Los Axiomas de ZF

2.— La Concepción Iterativa de los Conjuntos

3.— Crítica de la Concepción Iterativa de los Conjuntos

4.— Algunos Inconvenientes de ZF

5.— La Individuación de los Conjuntos y el Principio de Cimentación (o: Las Cuitas de un Matemático en Catonia)

6.— La Lógica Combinatoria

Preámbulo

Varios son los motivos por los cuales la teoría de conjuntos ha ido granjeándose la difusión y el prestigio de que goza (aunque, a la vez, hay que reconocer que está igualmente sometida a las embestidas de quienes, adeptos del intensionalismo, juzgan estéril la teoría de conjuntos al menos para fines de vuelo suficientemente alto).

El más importante de tales motivos es lo fructífera que se ha revelado tal teoría no sólo para formalizar amplísimos sectores de la matemática superior, sino también para ayudar, desde y con los instrumentos que ella aporta, a descubrir campos de estudio matemático enteramente nuevos, si bien algunos de ellos, como las historias de los transfinitos inaccesibles p.ej., suenan todavía a muchos como versiones contemporáneas de la angelología areopagítica.

Conque la teoría matemática de conjuntos —que en sus inicios, al ser puesta en pie por Frege y por Cantor a fines del siglo XIX, parecía condenada a una vida precaria y arriesgada, ante el alud de las paradojas que pronto se revelaron en ella y que llevaban trazas de hacerla zozobrar lastimosamente— ha ido logrando, gracias a axiomatizaciones como la de Zermelo-Fraenkel (ZF en adelante) una estabilidad y una en parte merecida aquiescencia entre los especialistas. Mas sólo en parte.

El propósito de este artículo es el de mostrar que filosóficamente la teoría estándar de conjuntos es insatisfactoria, no (o no principalmente) por ser incompatible con las «intuiciones» de sesgo intensionalista, sino por un fallo muchísimo más grave: porque, con todo cuanto se ha forcejeado por inventar para ella unas credenciales, o unos títulos de legitimidad conceptual, que la hicieran recomendable a fuer de cimentada en una «noción» de conjunto previa a la axiomatización y calificable dizque sin forzar las cosas como natural o espontánea o «intuitiva», de hecho las construcciones semánticas que aspiran a articular semejante noción son meramente eso, construcciones semánticas formales —rigurosas, sin duda, pero artificiales también—, ya que no existe ninguna «noción» presistemática como la que quieren aducir sus adeptos; al paso que, antes bien, esa noción (intrasistemática, que no presistemática) resulta sospechosamente híbrida, y acaso se trate de un engendro o apaño *ad hoc*.

Lo peor no es eso; ni siquiera lo es el que no parece haber argumentos fuertemente convincentes a favor de la verdad de los axiomas de ZF; ni el que, aunque fueran verdaderos, no podrían permitir articular una teoría de conjuntos que respondiera a cuestiones filosóficas fundamentales.

Lo peor de todo es que la teoría no puede ser verdadera, salvo interpretada de un modo no estándar.

Afortunadamente, hay alternativas a la teoría estándar de conjuntos que —no exentas, no, de dificultades, algunas de ellas bastante fuertes— me parecen, a fin de cuentas, preferibles. P.ej. las teorías de conjuntos de Quine, NF y ML. Mas, como de ellas me ocupo en otros trabajos recientes y alguno más en preparación, me limitaré aquí, salvo alguna alusión de pasada, a abogar por otra alternativa que juzgo más prometedora incluso que las de Quine: una teoría combinatoria de conjuntos basada en una lógica no clásica.

---

§1.— Los Axiomas de ZF

Embarrancada que estaba la teoría de conjuntos por el descubrimiento de las paradojas, fue el año de 1908 fértil en soluciones. De un lado, la teoría ramificada de tipos que se le ocurrió a Russell gracias a ideas de Poincaré; teoría que sólo alcanzó su mejor expresión en la 2ª edición de *Principia Mathematica*, en 1927 (al echarse por la borda el axioma de reducibilidad que, en la versión primera, aguaba la teoría y la 'desramificaba' por decirlo así). De otro lado, la primera axiomatización de la teoría de conjuntos de Zermelo.

Habían surgido las paradojas de la teoría de conjuntos de sólo dos supuestos. Uno era el Principio de Abstracción, a saber: que, para cualquier matriz (o sea: fórmula, que puede contener variables libres —o sea, el equivalente formal de pronombres terciopersonales), 'p', es verdad lo siguiente de cualquier ente z: z viene abarcado por el conjunto de entes que p (por ^xp) en la medida en que sea verdad p', siendo p' el resultado de reemplazar en las ocurrencias libres de 'x' por sendas ocurrencias libres de una expresión que denote a z. El segundo supuesto es el Principio de Comprensión, a saber que, para cualquier matriz 'p', existe el conjunto de entes que p (y, por ende, que ese mismo conjunto, ^xp, es uno de los entes a los cuales se aplica el esquema anterior, el principio de abstracción).

Para atajar las dificultades que se siguen de esos dos supuestos, Zermelo ideó un ingenioso artilugio; lo esencial del mismo estriba en abandonar el principio de comprensión y reemplazarlo por una serie de principios de comprensión particulares, que vayan estipulando para casos aislados —como con cuentagotas— la existencia de conjuntos expresables o denotables de cierta manera, pero no en general de los demás. Al paso que se mantiene el principio de abstracción, pero, naturalmente, restringido a los casos en que ^xp exista. Su solución fue completada luego por Fraenkel y Skolem; y es el sistema así completado el que recibe la denominación de 'ZF'. Voy a empezar presentado el meollo del sistema originario de Zermelo; del principal añadido de Fraenkel, el axioma de reemplazo, hablaré un poco después; sin embargo, la primera formulación que voy a dar de los axiomas zermelianos no es exactamente la originaria del propio Zermelo (en 1908), sino la hoy estándar; luego puntualizaré las diferencias, y diré por qué se dan.

En primer lugar, Zermelo abandona la pretensión de enunciar un principio explícito de abstracción. Y es que, en verdad, lo que hace es enunciar cada una de las instancias que va poquito a poco estipulando del esquema de comprensión de tal manera que lleve aparejado su propio principio de abstracción —o, con otras palabras, de tal suerte que se asegure, para cada uno de los conjuntos cuya existencia se estipula, la aplicabilidad al mismo del principio de abstracción. Así, lo primero de todo es postular el llamado esquema de Assonderung (separación o desgajamiento), que asegura que, dado un conjunto, x, existe el conjunto de aquellos miembros de x de los que sea verdad p (para cualquier matriz 'p') y que ese subconjunto de x es un ente z tal que cualquier ente x viene abarcado por z ssi x es tal que p. El esquema de desgajamiento es, pues, una fusión de una instancia del principio de comprensión con la correspondiente del principio de abstracción. Y esa instancia es ésta: en vez de decirse que, para cualquier matriz 'p', sin excepción, valen esos dos principios (existe ^xp y ^xp abarca a z ssi p'), en lugar de eso (el principio de) Desgajamiento dice que eso se aplica a una matriz p cuando ésta es de la forma 'u abarca a x y q', siendo —eso si— 'q' cualquier matriz, mientras que 'u' es una variable libre; luego se cuantifica universalmente cada instancia del esquema y resulta esto: 'Para cualquier ente u, existe el conjunto de miembros de u tales que p' —y es un conjunto que sólo abarca a todos los miembros de u tales que p . El resultado de tal restricción draconiana acerca de cómo deba ser la matriz autorizada en el principio de abstracción es que no se postula ya en general la existencia del conjunto de entes con tal o cual característica, sino únicamente el de, dado un conjunto que exista, un subconjunto del mismo que abarque a aquellos de sus miembros con la característica en cuestión.

Naturalmente el esquema de desgajamiento por sí solo no permitiría avanzar. De ahí que Zermelo vaya añadiendo otros axiomas. Uno de ellos es el del dúo: para cualesquiera dos entes —idénticos o diversos— existe el conjunto que los abarca sólo a ellos dos —y ese conjunto, como cualquier otro, cumple la condición que lo especifica, o sea, en este caso: la de abarcar sólo a ambos entes dados. Otro axioma es el de la unión: dado un conjunto, x, existe otro que abarca sólo a todos los miembros de algún miembro de x. Otro axioma es el del potencial: para cualquier ente, x, existe el potencial de x, e.d. el conjunto de los subconjuntos de x.

Esos cuatro axiomas más el de extensionalidad (si dos entes son diferentes, es que uno de ellos abarca a algún miembro no abarcado por el otro), más el de infinidad (según el cual existe un conjunto que abarca infinitos miembros, a saber el conjunto que abarca al conjunto vacío, y que, además, cuando abarca a un ente x, también abarca a {x} e.d. al conjunto que tan sólo abarca a x) constituyen el sistema axiomático de Zermelo.

Añadiéronse después otros tres esquemas axiomáticos; uno de ellos por Fraenkel en 1922, el de reemplazo, hace redundante al de desgajamiento —que pasa a ser un teorema demostrable; otro, añadido por Zermelo en 1930 (pero un equivalente del cual había sido acuñado por von Neumann en 1929 y de hecho ya en 1917 por Mirimanoff —quien aparentemente, y según Hao Wang, constituyó una importante fuente de los desarrollos de von Neumann), es el axioma de Cimentación, o *Fundierung*, a saber: cualquier conjunto no vacío abarca al menos a un miembro disjunto respecto de sí mismo, e.d. a un miembro que ni se abarca a sí mismo ni abarca a ningún otro miembro del conjunto dado; el tercer añadido fue el famoso axioma de elección. Con Cimentación se probaba que ningún conjunto se abarca a sí mismo —y que, por ende, no existe ningún conjunto universal, o sea: abarcador de todo. Pruébase también (con cimentación más elección) que no hay ninguna cadena de abarcamiento infinitamente descendente (o sea: un conjunto que abarque a algo que abarque a algo que abarque a algo, y así sucesivamente al infinito).

A muchos les ha encantado ese axioma y han proclamado a bombo y platillo que es «intuitivamente» obvio, porque, sin él, tendríase que podría haber, p.ej., conjuntos de conjuntos de conjuntos de conjuntos de… de conjuntos de conjuntos… y así al infinito. Aparte de que no he visto nunca un argumento en contra de tal posibilidad, lo que pasa es que con Cimentación (más el axioma de elección) pruébase otra cosa (si bien —según en seguida lo voy a aclarar— eso no se probaba en la versión original de Zermelo, pues en ella los axiomas no venían exactamente formulados como se acaba de hacer aquí), a saber: que cualquier conjunto tiene como último constituyente único al conjunto vacío, donde es constituyente último de un conjunto, x, si lo hay, algo z tal que: o x es(idéntico a) z; o x abarca a z; o x abarca a uno o varios conjuntos cuyo constituyente último sea z (p.ej. x={z,{z}} etc.).

Para evitar ese resultado de pesadilla, P. Suppes modificó la teoría en 1960 —retornando en ese punto a algo parecido a la formulación originaria del propio Zermelo en 1908—, de modo que vinieran reconocidos entes que no fueran conjuntos; el principio de extensionalidad vendrá así abandonado en su generalidad, y habrá que introducir un nuevo predicado, éste monádico, que, al ser concatenado con un denotador, diga que lo denotado por éste último es un conjunto. (Nótese que ese predicado no podrá tener ninguna extensión, o sea: no podrá haber ningún conjunto que sea el conjunto de todo aquello que satisfaga ese predicado, porque en ZF se prueba que no existe ningún conjunto de todos los conjuntos.)

Antes de seguir conviene introducir la puntualización, más arriba prometida, sobre en qué difiere esa formulación, hoy estándar, de los axiomas de Zermelo de aquella otra que ese autor brindó de los mismos en 1908.

Zermelo había entonces añadido un axioma que postulaba la existencia de síngulos o clases unitarias, e.d. para cada ente x, {x}. Sin embargo, dada la existencia de {x,z}, para cualesquiera x, z, existirá por tanto {x,x}, que, por definición será {x}. Luego es redundante. Había también añadido un axioma que decía que existe el conjunto vacío, Ø, o sea el único conjunto sin miembros. ¿Es menester postularlo expresamente? Dada la existencia de algún ente x, existirá —en virtud de Desgajamiento— un ente *u* al que podemos llamar ‘el subconjunto de x que abarque sólo a todos aquellos de sus miembros, z, tales que z≠z (si los hay)’; como evidentemente no los hay, *u* no abarcará a nada; por extensionalidad, *u* será idéntico al subconjunto de cualquier otro conjunto dado que abarque sólo a los miembros de éste último que sean diferentes de sí mismos (y, por lo tanto, a ningún miembro).

Sin embargo, asoman dos problemas al respecto. El primero es que, a menos que se pruebe lo contrario, nada asegura que *u* sea un conjunto; si hay individuos, y si los individuos no tienen miembros, puede que *u* sea un individuo (un ente al que pertenecen los miembros del ente dado *x* que sean diversos de sí mismos).

El segundo problema es que hemos dicho: 'dado algún ente, x'. ¿Hay alguno? Los axiomas de unión, potencial, etc., son condicionales: dado un ente, existe el conjunto tal o cual. El axioma de infinidad, en cambio, afirma categóricamente la existencia de un ente; si no existiera el conjunto vacío, el conjunto infinito cuya existencia postula tal axioma sería un ente vacío; luego existe al menos un ente vacío (sin miembros). Por consiguiente, el conjunto infinito en cuestión no es vacío, sino que es de veras infinito.

Pero ese miembro suyo al que llamamos 'Ø', ¿es un conjunto? Eso todavía no está claro (a menos que se postule como axioma, que es lo que hizo Zermelo). Porque puede que haya otros entes sin miembros, los *individuos*. Y entonces Ø podría ser uno de ellos. Sólo que en virtud de extensionalidad, todos ellos serían un solo y mismo ente, y, por ello, idénticos a Ø.

Para evitar esa consecuencia, Zermelo formuló de otra manera el axioma de extensionalidad, restringiéndolo a conjuntos; conque los *individuos*, si los hay, aun no abarcando nada, no serían, desde luego, idénticos a Ø; y, similarmente, restringió el axioma del potencial, para evitar que cualquier «individuo» fuera abarcado por el potencial de cualquier clase.

La formulación estándar de los axiomas zermelianos es más elegante que la originaria, pero paga el precio de que con ella se demuestra que no existen individuos y que el único constituyente último de lo real es la clase vacía o nula.

Me queda ya tan sólo —para terminar este apartado— decir algo del axioma de reemplazo. Lo que viene a sostener ese axioma es que, dado un modo de hacer corresponder a cualquier ente, tomado como argumento, a lo sumo un solo ente como valor (funcional), entonces, dado un conjunto, *x*, existe el conjunto de aquellos entes que sean valores funcionales, en virtud de (o mediante) ese *modo de corresponderse*, para sendos miembros de *x*.

Nótese que la formulación es cuidadosa para evitar postular la existencia de una función que sería ese modo de correspondencia. Háblase, tan sólo, de un mero 'modo de corresponderse'; y todo lo que se quiere con ello decir es que, si 'p' es una fórmula tal que es verdad que 'p' contiene ocurrencias de sendas variables 'x' y 'z' y 'q' resulta de reemplazar cada una de las ocurrencias libres de 'z' en 'p' por una, igualmente libre, de 'u', entonces, si es verdad 'Todo ente x es tal que, si p y q, z=u' (e.d. x no se relaciona más que con un solo ente del modo expresado en 'p'), entonces, dado un conjunto *v*, existe el conjunto de entes, *z*, tales que hay algún miembro, *x*, de *v* tal que p. (P.ej., si cada ente tiene un solo padre, dado un conjunto, el de los vinateros, hay un conjunto de los padres de vinateros.)

Que con ese esquema de reemplazo se prueba el de desgajamiento es algo muy sencillamente demostrable. Lo importante es que Reemplazo es un axioma (un esquema axiomático, para ser exactos) fortísimo. Sin él, desde luego, la teoría de conjuntos (zermeliana) se quedaría coja y carente del poder deductivo tan considerable de que ha dado muestras ZF. Pero lo malo es que la, ya cuestionable, base «conceptual» del sistema viene un tanto resquebrajada al añadirse ese esquema de reemplazo.esbozo

§2.— La Concepción Iterativa de los Conjuntos

En honor a Zermelo, hay que decir que no se le pasó por las mientes enaltecer su sistema axiomático como la emanación de una supuesta concepción «intuitiva» que fuera, de alguna manera, *la* genuina y auténtica noción de conjunto.

Al revés: en el escrito en el cual proponía su sistema axiomático, lo justificaba sobre la base de la bancarrota de la teoría ingenua de conjuntos (la cantoriana), como un tanteo para encontrar una axiomática que permitiera probar todo lo valioso en teoría de conjuntos pero evitando las contradicciones.

Todavía más recalcó von Neumann la arbitrariedad de los axiomas, ya sea en esa versión (ZF) de la teoría estándar, ya en la que él mismo luego elaboró (y de la cual sólo de pasada me ocuparé en este articulo).

Sin embargo, el sistema formal ZF, como tantos otros, ha sido fértil en suscitar modelizaciones, e.d. estudios semánticos en los que, razonando sobre ciertos conjuntos según suele hacerse en matemáticas —sin formalizar estrictamente—, se indaga si los mismos son o no modelos de una teoría, o bajo qué condiciones podrían serlo, o qué pasa si tal o cual de esos conjuntos lo es o no.

(Digamos que un conjunto es modelo de una teoría si hay una valuación (admisible) que envía a cada teorema de la teoría sobre un elemento *designado* o *distinguido* del conjunto en cuestión y a ningún teorema sobre un elemento no designado.)

Pues bien —como a menudo sucede—, una vez elaboradas, algunas de tales modelizaciones han parecido muy «intuitivas», e.d. han resultado (parecer) ser estructuras «naturales», no meros ardides, e.d. no amañadas ad hoc; tales, pues, que, de haberse pensado primero en ellas, en cómo son y qué contienen, hubiérase llegado (al querer uno hacer una teoría que viera a la Realidad como una estructura de ésas) exactamente a postular los axiomas (y reglas de inferencia) de la teoría en cuestión, y no otros.

La más ambiciosa de tales modelizaciones de ZF es la semántica de «estadios», explorada y defendida por Hao Wang, J. Shoenfield, G. Boolos, G. Takeuti, etc. No puedo entrar aquí en todos los detalles de la misma.

Lo que voy a criticar no es la semántica en cuestión, muy útil, sino las pretensiones filosóficas de quienes, como Boolos, proclaman que la misma expresa una concepción *espontánea* de conjuntos que constituiría una alternativa a la concepción *ingenua* (la de Frege y Cantor) sólo que, no ya en pie de igualdad con ella, sino superior, pues la otra se ha revelado inconsistente.

Consiste esa semántica —rotulada ‘concepción iterativa de los conjuntos’— en entender que un conjunto es algo que viene formado, constituido, originado, a partir de miembros, o de falta de tales miembros. Un conjunto sería una agregación de miembros, en suma. (Precedente de ese enfoque sería la visión de Dedekind criticada por Frege; Cantor parece haber oscilado.)

Conque un primer estadio en la constitución de conjuntos seríaa aquel en el cual se forma cualquier conjunto de elementos dados; conjunto vacío únicamente si no se dan elementos; de darse elementos, cuantas combinaciones, finitas o infinitas, de los mismos sean *posibles* —posibles en un sentido amplísimo: imaginables sin contradicción; y no puede («por definición») haber contradicción en que se combinen varios individuos o elementos originarios dados.

Viene luego un segundo estadio en el cual se forma cualquier conjunto de entes hasta aquí existentes, sean de los formados en el estadio anterior, sean de los dados como elementos; y luego otro así; y así sucesivamente al infinito. Lo cual significa que, dados diversos conjuntos, en un estadio, fórmase en el siguiente la unión de los mismos (un conjunto que sólo abarque a lo abarcado, separadamente, por uno u otro de esos conjuntos).

Tenemos ya una infinidad (numerable) de estadios. Después de todos ellos viene otro, que llamamos 'estadio ω', en el cual constitúyense todos los conjuntos «posibles» —en ese sentido— de entes existentes hasta ese momento, e.d. de individuos y/o conjuntos constituidos en los estadios 0,1,2,3,…

Sigue al estadio ω el ω+1, en el cual vienen constituidos los conjuntos de entes existentes hasta el estadio ω inclusive. Luego el estadio ω+2, etc. etc. Luego el estadio ω+ω (ω2), luego el ω2+1 y así infinitamente al infinito.

Recapitulando los principios que rigen ese proceso infinito, cabe recalcar estos supuestos: se constituye cada conjunto una sola vez, de una vez por todas (no puede ser un Guadiana que, tras empezar a existir, cese luego de tener realidad y la recobre más tarde —ni nada por el estilo); además, cada conjunto viene constituido tan pronto como, previamente, tengan realidad todos sus miembros: no puede, pues, suceder que existan ya los miembros en el estadio j pero el conjunto de ellos sólo cobre realidad en el j+2, p.ej.: cobrará realidad tal conjunto en el j+1 exactamente (dada la hipótesis de que los miembros existen ya en el j mas no antes).

Lo de cuáles conjuntaciones o *combinaciones* son posibles no ha quedado quizá del todo claro. Semejaba estarlo al comienzo, pues los elementos o individuos de los cuales se partía en el estadio 0 eran, sin duda, o inexistentes, o en cualquier caso en número numerable, e.d. a lo sumo tantos cuantos números naturales hay (0, 1, 2, …). Pero, ¿qué pasa cuando haya ya entes en cantidades inenumerables? ¿Cuáles de ellos, cuántos, y cómo, pueden combinarse? ¿Qué sería esa conjuntación o combinación?

¡No nos preocupemos! Digamos que pueden conjuntarse sin más que tener algo en común, alguna *característica*, e.d., sin más que el que pueda decirse de todos y cada uno de los conjuntados que es verdad de él tal o cual cosa, que es así o asá. Con otras palabras, para cualesquiera entes existentes antes de un estadio y de cada uno de los cuales sea verdad que es así o asá, surgirá en ese estadio —si no ha surgido antes— el conjuntamiento de todos ellos, el ente que los abarca sólo a todos ellos.

Con esa semántica de estadios, evidentemente (o acaso no tan evidentemente —pues en verdad el razonamiento involucra un fortísimo principio de inducción matemática transfinita), resultan verdaderos los axiomas de Zermelo. No así el esquema de reemplazo. Boolos formula este principio que regiría una semántica de estadios adecuada para hacer verdadero el esquema de reemplazo: 'Si cada conjunto viene —comoquiera que sea— correlacionado con al menos un estadio, entonces para cualquier conjunto *z* hay un estadio *s* tal que, para cada miembro *v* de *z*, *z* es posterior a algún estadio con el cual venga *v* correlacionado'.

Aparte de que, desde luego, no ve uno qué plausibilidad pueda tener tal postulado —al margen de la de que encajen bien con él las cosas para *hacer* verdadero al esquema de reemplazo—, cualquiera que sea el atractivo de esa llamada concepción iterativa de conjuntos, o su verosimilitud como una concepción dizque natural de qué sean las clases o conjuntos, lo que parece seguro es que ese postulado adicional no se beneficiaría ya de ninguna dosis de tal verosimilitud putativa.

Por otro lado, el postulado de marras restringiría enormemente los modelos de la teoría, las estructuras de estadios, imponiendo la existencia de estructuras que comprendan estadios de todas las cardinalidades accesibles.

---

§3.— Crítica de la Concepción Iterativa de los Conjuntos

Uno de los adalides de ZF y de la concepción iterativa, G. Boolos, afirma (en *Journal of Philosophy* 68/8 (abril 1971), p. 219):

> Una solución final y satisfactoria de las paradojas teórico-conjuntuales no puede estribar en una teoría que bloquee la derivación de las mismas imponiendo restricciones técnicas artificiales a los axiomas, restricciones que vengan impuestas tan sólo porque, si no, se seguiría un paradoja; esas otras teorías sobreviven sólo mediante tales expedientes artificiales. Únicamente ZF (junto con sus extensiones y subsistemas) es… una teoría de conjuntos independientemente motivada; por decirlo así, hay 'tras ella un pensamiento' sobre la naturaleza de los conjuntos que hubiera podido exponerse aunque, por imposible, hubiera sido consistente la teoría ingenua de conjuntos.

Es precisamente eso lo que yo pongo en tela de juicio. Nada tengo (¿hace falta decirlo?) contra ZF como un medio, habilidosamente fabricado, de probar bastantes cosas, esquivando las paradojas. Es una manera, como hay otras, de brindar una fundamentación a amplios cuerpos de la matemática. La prudencia, la agudeza y el tino de Zermelo y sus continuadores se han visto coronados por el éxito.

Pero ahí se terminan los méritos de la teoría estándar. Los logros de esa teoría no son triunfos de una concepción filosófica subyacente, sino, antes bien, frutos de la maña y del andarse con pies de plomo. Ni siquiera creo que lo descrito en el apartado preceden te pueda ser decorosamente tildado de constituir propiamente una 'concepción' de los conjuntos en un sentido interesante de este vocablo. O sea: en el sentido de constituir una representación de qué sea aquello sobre lo que se va a teorizar independientemente de la teoría misma por construir, expresable en términos no técnicos e «imaginable» sin pasar por los moldes mismos de la teoría en cuestión.

En efecto: ¿es realmente inteligible toda esa descripción de estadios para quien no se haya entrenado o al menos iniciado en la propia teoría estándar de conjuntos?

¡Veamos! Por de pronto, quien vaya a entender la explicación ha de aceptar que dos conjuntos son diversos sólo si algo pertenece al uno y no al otro. Eso —nos dice Boolos— es analítico. ¡Sea! Ha de manejar ese entendedor el procedimiento de pasar allende lo finito, la recursión transfinita. Ha de haber entendido cómo se «forman» o constituyen, a partir de conjuntos dados, uniones de los mismos, independientemente de cuáles sean, de qué «niveles» sean, de cuál sea la naturaleza de sus respectivos miembros.

Y, sobre todo, ha de tener una noción amplísima de qué sea una conjuntación o combinación posible.

Aparte ya de cuán plausible o implausible sea ese principio de conjuntabilidad, estriba la dificultad en que es una concepción teórica muy fuerte: son conjuntables todas las cosas, de niveles o estadios «ya» (?) dados, que compartan «algo», alguna característica, e.d. que sean calificables o caracterizables de alguna manera que les sea común.

Pero saber que existe tal conjuntabilidad no es otra cosa que saber que:

1º) Hay una colección, un conjunto total, de cuanto se lleva «ya» formando, hasta el estadio inmediatamente anterior inclusive —e.d. que es verdadero el axioma de unión, según el cual cualesquiera conjuntos «dados» son unibles, e.d. hay una unión o suma de ellos—; y

2º) Es también verdadero el esquema zermeliano de desgajamiento; ni más, ni menos.

Y ¿qué es lo que puede hacer verosímiles esos dos supuestos? Podría replicarse a mi pregunta (*¿capciosa*?) que una cosa es si esa tesis de la conjuntabilidad es verdadera o falsa, otra es que forme parte de la concepción.

Sin embargo, estábamos en tratar de ofrecer una concepción presistemática, preteorética, algo que, sin comulgar uno todavía con la teoría ni haberse enfrascado en ella, pudiera, no obstante, entender (entender en algún sentido un poco fuerte, viendo, pues, cuál sea su tenor, su atractivo, su —al menos relativa— coherencia, su enjundia, su filo o perfil, su busilis o *intríngulis* —si se me permite decirlo así).

Claro que una «concepción» en ese sentido es normalmente algo que a uno puede tentarlo como un canto de sirena, sin saber adónde lo va a llevar a uno si la abraza. Pero es que una concepción en ese sentido es algo describible con pocas palabras y sin tecnicismos, aunque luego —al desentrañar sus supuestos o consecuencias— asomen resultados imprevistos o hasta paradójicos.

Recapitulo mi primera objeción: no es una «concepción» en ese sentido fuerte, en el cual sí era, en cambio, una concepción de conjunto la de Frege y Cantor, a saber: la de que un conjunto (una *extensión conceptual* en la terminología de Frege) es lo que abarca sólo a todos aquellos entes que tienen en común el ser así o asá. Esa es la concepción ingenua de conjunto.

Mi segunda objeción es que hay dos alternativas a la concepción ingenua, a saber la construccional y la enumeracional (o conjuntacional); pero, sin embargo, la llamada concepción iterativa, aunque toma algo de cada una de ellas, es incompatible con ambas.

La concepción construccional es aquella que concibe, efectivamente, un proceso de construcción de los conjuntos; es una visión de sesgo idealista, equiparable a la visión husserliana del idealismo fenomenológico transcendental, con la constitución del mundo, incluyendo sus idealidades matemáticas, desde la intersubjetividad monadológica transcendental, y —más por debajo de ésta— desde el suelo originario del ego transcendental; o, si no, algo afín a la constitución de lo real en el primer Carnap, el del fenomenalismo radical (aunque en el campo lógico-matemático Carnap no creyó hallar ningún proceso de constitución así, pues lo encasilló en lo 'analítico'); algo, pues, que llevaría más bien a optar por una lógica como la intuicionista u otra de las de la familia de lógicas constructivistas.

Para el enfoque construccional realmente los conjuntos se van constituyendo o construyendo por estadios o pisos. Mas entonces, evidentemente, está de más el axioma de elección, pues es lo más anticonstructivista que cabe (a no ser que se postule el axioma de construibilidad enunciado —que no propuesto— por Gödel; pero, por razones que no hacen al caso, nadie o casi nadie ha postulado tal axioma).

No sólo eso. En lógica clásica (y en la mayoría de las no clásicas también) ‘hay’ equivale a ‘no todo no’ y ‘todo’ equivale a ‘no hay nada tal que no’. Constructivísticamente fallan esas equivalencias. En ZF, articulada sobre la lógica clásica, valen.

Y, sin embargo, debieran fallar. Porque, p.ej., de que no haya (todavía) en un estadio ningún conjunto así o asá no debería deducirse que todos los conjuntos (en cualquier estadio) sean así o asá.

Ahora bien, constructivísticamente no puede hablarse de ninguna totalidad de todos los estadios, pues eso nunca cabe construirlo. Las cuantificaciones universales de ZF debieran, pues, reemplazarse por negaciones de cuantificaciones existenciales. Si es que se toma uno en serio lo de un *proceso* de constitución o de construcción. Que, si no, entonces existe una totalidad de todos los conjuntos, no hay ningún proceso, ni hay por qué excluir conjuntos que se abarquen a sí mismos, o aros (bucles), cadenas de abarques sin comienzo ni fin etc.

Otro punto de conflicto entre la concepción construccional y la iterativa es que la primera prohíbe conjuntos impredicativos, en el sentido de Poincaré y Russell, o sea: clases especificables en términos de cuantificaciones tales que la variable cuantificada tenga como campo de variación un conjunto que abarque a la propia clase así especificada, si ésta existe.

Pues bien, el axioma del potencial acarrea que existen conjuntos impredicativos. P.ej., pruébase en ZF el teorema de Cantor de que cada conjunto es más pequeño que su potencial; y se prueba aduciendo que, si no fuera así, entonces habría una correlación entre un conjunto x y su potencial y existiría el subconjunto de x que abarque a los miembros de x no pertenecientes a su respectivo correlato, el cual, entonces, abarcaría y no abarcaría a aquel elemento de x del cual fuera correlato.

Sin embargo, si no hubiera conjuntos impredicativos, entonces no podría haber ningún subconjunto así —porque esa expresión incrustada ‘su correlato respectivo’, al expandirse, revela una conculcación de la predicatividad— ni siquiera en el caso de que existiera la correlación en litigio; con lo cual fallaría la prueba del teorema de Cantor (que es lo que pasa en el sistema de Russell, PP.MM., 2ª edición, de 1927).

En la semántica de estadios, lo que asegura la *verdad* del axioma del potencial es eso de que no pueda haber estadios intermedios entre uno en el cual ya existan todos los miembros de un conjunto y aquel en el que venga constituido éste último.

Constructivísticamente impondríase una restricción al respecto, prefijando esta prótasis: si ese conjunto es ‘construible’, e.d. predicativamente especificable. Por ello constructivísticamente fallaría el axioma del potencial (el potencial de un conjunto no abarcaría a todos los subconjuntos del mismo). (No es, pues, de extrañar que, ya en 1908, Zermelo criticara el principio [de exclusión] del circulo vicioso, como contrario a las aspiraciones de una teoría de conjuntos matemáticamente potente.)

Eso por lo que hace a la concepción construccional. En cuanto a la enumerativa o conjuntacional, la conocen bien los escolares, pues en las clases de *teoría de conjuntos* que se les imparten distínguense dos géneros de especificaciones de conjuntos: por *comprensión* (o *intensión*) y por *extensión*.

Se nos cuenta que la primera especifica a un conjunto como el cúmulo de los entes así o asá ('así o asá' en lugar de una descripción indefinida); al paso que la segunda especifica a un con junto con una lista finita o infinita: {x,y,z,u,v,…}.

Alguien podría llamar a este segundo género de especificación una agregación e invocar a Dedekind como aquel que tendió a ver así a los conjuntos.

En todo eso hay problemas. La especificación en *comprensión* no tiene por qué ser intensionalista. Sin embargo, el principio de extensionalidad, en la versión más rígida —que es la más arriba expuesta— gana en atractivo si un conjunto es siempre algo especificable *extensionalmente* y no es más que eso; algo toda cuya entidad estriba en los miembros puestos-juntos, conjuntados.

Ahora bien, esta concepción enumerativa o conjuntacional es incompatible con la existencia de un conjunto vacío; pues si se dice que éste es { }, con nada entre las llaves, ¿se ha dicho algo interesantemente explicativo de en qué consista? ¡No! Sólo se ha dicho que ese conjunto, o conjuntamiento, es como un conjuntamiento de esto y aquello, sólo que sin conjuntar nada; o sea: que es como si fuera un conjuntamiento, pero sin serlo.

Tampoco permite tal concepción distinguir x de {x}, a un ente de su síngulo (la clase de los doce apóstoles del conjunto al que sólo ella pertenece). Ya es difícil entender, a tenor de esa concepción conjuntacional, qué sea un conjunto infinitamente grande (¿no es pura habladuría eso de una especificación infinitamente larga?); pero, en cualquier caso, no puede haber especificaciones así de conjuntos inenumerables, ni menos de cardinalidades como $\aleph_\omega$, p.ej.

Hay otra dificultad más: por un lado, los adeptos de la concepción iterativa, como Boolos y Kripke, hablan en términos de conjuntamiento de entes *previamente* dados, ciñéndose en eso al enfoque conjuntacional; pero, por otro lado, además de postular una clase vacía y un síngulo de cada ente, postúlanse en ZF axiomas como el de desgajamiento y el de reemplazo que son totalmente incompatibles con el enfoque conjuntacional; y la raíz está en reputar como conjuntables a cosas que compartan una calificación o caracterización, o sea en considerar constituible a un conjunto a través de (o gracias a) una especificación en comprensión.

Algo más, todavía. La visión meramente conjuntacional de los conjuntos —como *conglomerados* (*pools*), e.d. como *conjuntamientos* toda cuya entidad estribe en los miembros *puestos* o *tomados* juntos— no puede dar lugar a otra cosa que un enfoque como el de la mereologia de Leśniewski o de Goodman, o sea: una teoría en la que la relación de abarque viene identificada con la de inclusión y es, por ello, transitiva.

Según esa visión mereológica, dos *sumas*, dos *todos* o conjuntamientos no pueden ser diversos si no difieren sus constituyentes últimos. Un corolario de ello es la ecuación {x}=x. El mereólogo dirá que, estribando toda la entidad del conjuntamiento en los entes conjuntados y —a lo sumo, si se quiere añadir— en su mero estar conjuntados, no cabe conjuntar conjuntamientos más que en el sentido de fundirlos, fusionarlos en un conjuntamiento de los entes respectivamente conjuntados en uno y en otro.

Por ello la visión conjuntacional no requiere ni siquiera el uso de un verbo como ‘abarcar’ (o lo converso, ‘pertenecer a’). Basta con indicar a los miembros o entes conjuntados.

Claro que asoma, hasta para esa concepción, una dificultad al respecto, que —lo veremos en seguida— es más grave para la concepción iterativa, a saber: que la especificación de un conjunto por indicación o enumeración de los miembros comporta un ‘y’ terminal —delante del último elemento— que sobreentiende un adicional ‘nada más’ o ‘sólo ésos’ o algo así.

— En primer lugar, eso muestra que la especificación no es puramente «en extensión», sino también «en comprensión», pues se hace por la caracterización de ser uno de esos entes y ningún otro —o, mereológicamente visto, ningún otro *fuera* de ellos, no incluido en la suma de ellos.

— En segundo lugar, se contiene una referencia a *todo lo demás*, sólo que negativa, lo cual de algún modo presupone esa totalidad de todo lo demás; de alguna manera hasta esa especificación enumerativa, o por lista, es la de un conjunto que no abarque a ningún ente que no sea uno de los enumerados, aunque si a éstos. (En seguida recalcaré eso mismo con referencia a la concepción iterativa.)

En todo caso, esos rasgos de la concepción conjuntacional la hacen inconciliable con la iterativa.

Por consiguiente, la concepción iterativa de conjuntos no es compatible con ninguna de las dos nociones preteoréticas de qué sean los conjuntos alternativas frente a la concepción ingenua de que un conjunto es lo que abarca a los entes comúnmente calificables o caracterizables de cierta manera determinada, cualquiera que sea.

Aparte de eso, no conozco ningún argumento persuasivo a favor de esa llamada concepción iterativa.

Sus adeptos parecen creer que la mera exposición de la semántica de estadios ya lo persuade a uno de que las cosas suceden así, o al menos de que es verosímil que así sucedan.

Pero no: o se es constructivista, y entonces habrá que postular algún ego transcendental, o algún serafín, o lo que sea, que lleve a cabo esa constitución por pisos finitos y transfinitos; o, si no, es dudoso que tenga un sentido claro eso de los estadios, los *previamente*, *ya* etc., en ese contexto.

Que, si se trata de categorías, si los desnivelamientos son tipales, entonces no puede haber cúmulos o conjuntos, como los que postula ZF, p.ej. {el número 3, {Venus}, Italia}.

Aun suponiendo que hubiera estadios de *constitución* de conjuntos (y, ¿qué es —¡díganoslo, por favor, los abogados de esa concepción!— eso de la *constitución* o *formación* de un conjunto?), ¿por qué no puede haber Guadianas, o sea conjuntos que empiezan a existir, cesan luego, y vuelven después a la realidad? (O que quizá periclitan para siempre.) ¿Por qué no? ¿Por qué esa conservación acumulativa? ¡Dennos, tengan la bondad, un argumento a favor de ese principio!

También hay sus más y sus menos sobre el principio de extensionalidad. Si hay *estadios*, ¿qué nos asegura que un conjunto no puede ver cambiados sus miembros de un piso a otro? Y, de ser así, ¿no habría que restringir el principio de extensionalidad?

Por último, ¿qué es lo que asegura, o hace al menos plausible, que haya un primer estadio, un estadio *cero*? ¿Por qué no otro antes, y otro, y otro…? ¿No hace falta argumento ninguno? ¿Es tan evidente de suyo? Y, además, ¿qué asegura que un conjunto no puede formarse cuando se formen sus miembros, simultáneamente? (Desde luego la analogía temporal no puede ayudar a hacer creíble ese postulado de necesaria posterioridad del conjunto.)

Un último problema es el de que la especificación de un conjunto no puede hacerse por mera indicación de cosas que abarque, sino que ha de comportar la cláusula o precisión adicional de que no abarque a nada más que a eso. Un 'sólo', explícito o implícito; que, parafraseado convenientemente, es una negación (fuerte) de abarque por el conjunto en cuestión de otras cosas.

En efecto, si se profiere la expresión 'el conjunto que abarca a todos los entes que p', está sobreentendiéndose un 'sólo', pues, si no, no se habría generalmente especificado ningún conjunto (determinado). (¿Cuál es *el* conjunto que abarca a todos los gaditanos? Hay muchos conjuntos así. Uno es el de los andaluces.)

Mas ese 'sólo', en expresión formal adecuada, es un cuantificador universal seguido por una negación; y ello revela dos facetas.

— La primera es que la especificación o determinación de un conjunto se hace por exclusión del 'resto' de cosas, y eso significa que se hace por negación. Al conjuntar —como nos lo cuentan los exponentes de la concepción iterativa— cosas *dadas* en un conjunto, mediante un *lazo*, estamos acotando o cercando eso que con juntamos y dejando fuera a lo demás. Sin embargo, a la negación o exclusión de lo demás —como lo vamos a ver en el Apartado siguiente— no se le concede o reconoce papel alguno ni en la concepción iterativa ni en ZF, pues en esta teoría ningún con junto tiene un complemento.

— La segunda faceta revelada por el tácito o expreso 'sólo' en la especificación de un conjunto es, precisamente, que siempre aparece en la misma un cuantificador universal irrestricto, cuyo campo de variación ha de ser el conjunto universal; y ése no es compatible con la estructura de estadios; cada conjuntamiento remite, pues, a un conjunto universal objetivamente existente independientemente de (*antes de*) los conjuntamientos sucesivos por estadios.

Así, el síngulo de x, o sea {x}, el conjunto que abarca a x y a nada más, será el conjunto z tal que todo ente, u, es tal que z abarca a u ssi u=x; todo ente u, del nivel o estadio que sea; todo miembro del cúmulo o conjunto de entes reales, pues.

Llévanos esta consideración al problema de la existencia de ese conjunto universal, la Realidad, al margen del proceso de constitución por estadios. Lo abordaré en la parte final del siguiente apartado.esbozo

§4.— Algunos Inconvenientes de ZF

ZF es una teoría matemática fructífera y útil. Pero presenta varios inconvenientes.

Uno de ellos es que no conserva nada que, de lejos o de cerca, se aproxime a un principio ingenuo de comprensión, a saber ‘Existe el conjunto de entes que p’.

Otra desventaja es que no acepta ninguna clase universal. Es más: demuéstrase en ZF que ningún conjunto abarca a todo.

Tampoco admite ZF complementos; si existiera el complemento de un conjunto (e.d. la clase de entes no abarcados por el conjunto), entonces la unión de ambos sería el conjunto universal.

¿Son baladíes esos tres defectos, según lo aseveran los adeptos de ZF? No. La noción de complemento es una de las más básicas en teoría ingenua de conjuntos. Es dudoso que valga considerar aproximaciones a una teoría ingenua a teorías que no acepten, bajo ninguna versión, la existencia de complementos.

Y teorías que sí la aceptan son las de Quine, NF y ML. ¿De qué privilegio gozan la conyunción, la disyunción, el condicional, para que sí venga asegurada la existencia de conjuntos especificables, a partir de expresiones denotadoras de conjuntos, con el empleo de cuantificadores, el verbo ‘abarcar’ y esos tres functores diádicos, al paso que estaría prohibido formar un denotador —en general— con el empleo de la negación?

Nadie —que yo sepa— ha aducido un argumento convincente para privilegiar de ese modo a los functores diádicos y *positivos* en desmedro del *negativo*.

Más grave todavía es la falta de cualquier principio general de comprensión. Una teoría de conjuntos que sí lo tiene es ML de Quine. Cierto que en ella viene, a cambio, sacrificado —o, mejor, restringido o matizado— el principio de abstracción. Existe el conjunto de entes que p.

¿Quiere eso decir que es un conjunto que sólo abarca a todos los entes que p? No forzosamente ‘El ente así o asá’ puede ser una expresión denotativa sin que por fuerza el ente denotado por ella tenga que ser, exactamente, así o asá; puede que sea lo suficientemente próximo a ser así o asá como para merecer venir considerado y apodado ‘el ente así o asá’. (Que nuestras actuales teorías de descripciones definidas no prevén ni autorizan eso es indicio de que no están lo bastante finamente pergeñadas.) ‘Me encontré con el portero’ — ‘Bueno, ¿sabes? no es exactamente un portero?’ (¿Quién no lo es? El portero.) Recuérdese el debate Donnellan/Kripke, que, desde esta óptica, podría reconsiderarse en parte.)

Tengo para mí que ninguna teoría de conjuntos es aceptable si no contiene o alguna versión, quizá atenuada o matizada, tanto del principio general de comprensión cuanto del de abstracción, o, a falta de eso, aproximaciones al uno y al otro principio en forma de postulaciones de casos tan numerosos y variados, tanto del uno cuanto del otro, como sea posible sin incurrir en incoherencia; o al menos apunte en esa dirección.

No sucede eso con ZF. Nada que tienda a un esquema general de comprensión. Y, en lo tocante al de abstracción, sí, irrestricto salvo con esta restricción: la prótasis ‘si existe el conjunto de entes que p'. ¿No sería mejor dejar caer tal prótasis y, a cambio, debilitar o restringir de otro modo la apódosis?

O, en lugar de tener un único principio general de abstracción, ¿por qué no aproximaciones parciales al mismo, en una construcción sistemática sin pretensiones de exhaustividad o definitividad, abierta a seguir postulando otras instancias más del mismo, en un proceso de aproximación asintótica al ideal de la teoría ingenua, proceso cauteloso y atento para evitar las paradojas?

Filosóficamente es inaceptable una teoría de conjuntos sin ningún principio general de comprensión. Por lo siguiente. Filosóficamente la única razón para creer en conjuntos es ser realista en el problema de los universales y, a la vez, extensionalista (de algún pelaje). (Nótese que 'universal' aquí no significa lo que significa en 'el conjunto universal', sino sólo esto: un ente compartido, *tenido* o ejemplificado en común, por las cosas caracterizables o calificables de cierta manera común.)

Es decir, el único motivo filosófico para afirmar que hay clases o conjuntos es pensar que ni el nominalismo ni sus variantes como el conceptualismo son respuestas adecuadas a la cuestión de los universales; sino que hay algo que tienen en común los entes de alguna manera similares, una similitud objetiva que los une, que comparten; y que ese algo es —en algún sentido interesante— extensional, o sea: un ente del mismo nivel ontológico (categorial) que sus miembros —comparte con ellos algo, el existir, en el mismo sentido de la palabra 'existir'— y, además, en algún sentido tiene una entidad *radicada* en la de sus miembros, a saber: la diferencia entre dos universales o propiedades tiene algo que ver con un diferente abarque por sendas propiedades de unos u otros entes; diferente abarque que, eso sí, puede consistir en una discrepancia menos fuerte que la que exige el principio clásico de extensionalidad; puede consistir, simplemente, en que no abarquen a cualquier ente ambas en la misma medida. (De eso de las 'medidas' o los grados en seguida diré unas palabras más.)

Sin principio de comprensión no puede una teoría de conjuntos articular una concepción realista de los universales, ni poco ni mucho. Y ¿qué si se dice que existe el algo en común compartido por todos los números naturales o el algo compartido por los que tienen riquezas, mas no el algo en común compartido por los entes que no tienen riquezas? ¡No, no! El que en un idioma exista un monema acuñado para significar o denotar a una propiedad o clase no es condición necesaria de existencia de un conjunto, ni su falta es ni siquiera indicio de tal inexistencia. Casi todas las expresiones denotativas de clases o propiedades son perifrásticas o sintagmáticas.

Otra razón más para echar de menos un principio general de comprensión o una aproximación al mismo, o siquiera una serie de tales aproximaciones: el vocabulario de ZF es el de la lógica clásica, paupérrimo. No se prevén en esa teoría los grados ni los matices aléticos.

Por ello resulta sumamente difícil articular una interesante teoría de conjuntos difusos como una extensión de ZF. Porque en una teoría de conjuntos difusos necesitaríamos, p.ej., dado un conjunto, x, reconocer la existencia del conjunto de entes, z, tales que z es más bien perteneciente a x; el de entes, z, tales que z es un poco perteneciente a x; el de entes, z, tales que z es, hasta cierto punto por lo menos, perteneciente a x; el de entes, z, tales que z es totalmente perteneciente a x. Etc.

Que eso (en general) no es lo mismo que el conjunto de entes que pertenecen a x y le pertenecen así, o asá. El vocabulario de que hemos menester para formar expresiones denotativas así es infinito, seguramente. Y ninguna extensión plausible de ZF puede darnos nada satisfactorio al respecto.

Igual pasa con functores diádicos. Necesitaremos, p.ej., junto a la mera conyunción ‘y’ otros functores conyuntivos, como un más insistente o interactivo functor de superconyunción, ‘no sólo… sino también’. Además del mero condicional, habrá otros condicionales en algún sentido más fuertes, o más estrictos. ¿Será, entonces, preciso multiplicar axiomas tan *ad hoc* como lo son el del potencial y el de la unión para atender a por lo menos alguno de esos nuevos functores?

(Como el *modus ponens* de unos es el *modus tollens* de otros, no faltará quien vea en este argumento un motivo para rechazar los enriquecimientos que ofrecen las teorías de conjuntos difusos. Pero dudo que sea razonable semejante conservadurismo.)

Y es que hay alternativas. Aun dentro de un enfoque brotado de la lógica clásica, están las teorías de Quine, NF y ML. Ambas poseen principios generales de comprensión. La una, NF, demasiado restringido (con el requisito de estratificación); pero en todo caso, no como una mera lista de axiomas *ad hoc*, que es lo que pasa en ZF.

Por lo cual es perfectamente viable, saliéndose del angosto recinto de la lógica clásica y disfrutando de la nueva abundancia de recursos que ofrecen lógicas multivalentes, articular una teoría de conjuntos difusos según las pautas de NF.

La otra, ML, tiene un esquema de comprensión irrestricto (al menos es ése un modo de entender y describir el sistema), restringiendo a cambio el principio de abstracción; en exceso también (de ello resulta una dificultad redhibitoria); pero, para el problema que ahora estamos abordando, eso es marginal. Teorías de conjuntos difusos que sean *ensanchamientos* de ML de Quine las hay. (Una de ellas vino expuesta en mi tesis doctoral, hace diez años; otras en libros y trabajos posteriores.)

Estriba la importancia de esa cerrazón de ZF para con cualquier difusificación de los conjuntos —al revés de lo que sucede con teorías articuladas con las axiomáticas que respectivamente caracterizan a NF y ML— en que, a diferencia de estos últimos sistemas, ZF es clásico hasta la médula, de manera consustancial e irremediable.

Échase de ver eso en que en ZF —y en la concepción iterativa que le sirve de semántica— un conjunto viene especificado por abarcar esto, aquello, lo de más allá, y por no abarcar en absoluto a nada más. Es una concepción, no exactamente enumerativa o conjuntacional, no, pero, eso si, *extensivista* de los conjuntos. En ese sentido le va bien el principio de extensionalidad en su formulación más rígida. A tenor de ese enfoque, no cuentan para la pertenencia a un conjunto los grados; ni los del estar dentro del conjunto, ni los del estar fuera de él.

Por el contrario, una concepción de los conjuntos que vea a éstos como los universales *in rebus* —los entes compartidos por aquellas cosas que sean caracterizables en común de cierta manera—, una concepción que, como consecuencia de ello, reconozca esquemas de comprensión mucho más amplios, estará abierta a que, por la ampliación ulterior del vocabulario, con la introducción de functores de matiz alético (con graduaciones tanto en la afirmación cuanto en la negación), quepa reconocer la existencia de conjuntos que, aun teniendo los mismos miembros, no los tengan en la misma medida.

A tenor de eso, el principio de abstracción y el de extensionalidad recibirán modificaciones; como mínimo el reemplazo del bicondicional 'ssi' ('si y sólo si') —que tan sólo requiere verdad (en uno u otro grado) de ambas cláusulas, o, si no, falsedad total de ambas— por un functor más estricto de equivalencia: 'en la misma medida en que'.

Un conjunto zermeliano es algo que sólo tolera que un ente venga totalmente abarcado por él o que no venga en absoluto abarcado por él. La concepción iterativa así lo requiere. No valen matices ni grados. No sólo por el cálculo cuantificacional subyacente (eso pasa también con las de Quine), sino por la (putativa) entidad misma de los conjuntos y su *génesis*.

Último problema con ZF: la ausencia de clase universal. Si es verdadera ZF, es verdadero cada uno de sus teoremas; es, pues, verdadero entonces que no existe ningún conjunto de todos los conjuntos; si ese y los demás asertos de ZF son verdaderos (a secas), es que la Realidad es uno de los modelos de ZF; la Realidad es el conjunto de todo lo real; éste es (si es verdadera ZF) tal que no abarca, pues, todo lo real. Por el principio de abstracción (de ZF), si existe ^xp, ^xp abarca a x ssi p; por ende, si es verdadera ZF, entonces, si existe la Realidad, ésta abarca a todo, incluso a sí misma. Luego (siguiendo la verdad de ZF) no existe la Realidad. Luego no hay ningún modelo de ZF que sea la Realidad. Luego ZF no es verdadera. No puede ser verdadera.

Este sencillo argumento es tan decisivo que asombra ver cómo tratan de escabullirse, casi con subterfugios, algunos adeptos de ZF. Porque, si lo que replican es que ésos son problemas metafísicos en los que ellos no entran, ¡bien! Están en su perfecto derecho —aunque a uno le pueda parecer un poquitín frívolo ese encogerse de hombros (como si en el fondo no fueran metafísicos los otros problemas de la matemática). Pero, en fin, es legítima esa actitud de especialista.

No es solución correcta el decir, como muchas veces se hace, que en ZF las variables tienen un campo de variación restringido a conjuntos, siendo diferente conjunto de clase (todo conjunto sería una clase mas no a la inversa). No porque sea ilícito inventarse ese distingo artificial, o cualquier otro, no, sino porque ZF no dice que sus variables estén así restringidas. Claro que cabe «traducir» ZF a otra teoría (p.ej. NB, la de von Neumann-Bernays) de tal manera que ésta resulte, con o mediante esa traducción, una extensión conservativa de la primera, y en el resultado se postule algún género de aproximación a la clase universal (que es lo que pasa en NB). Pero entonces, de ser verdadera esa otra teoría, lo verdadero no es cada uno de los axiomas originales de la teoría «traducida», sino tan sólo la peculiar versión del mismo que brinda la teoría receptriz a través de la función traduccional en cuestión.

Que no es poca cosa la relectura de las variables irrestrictas de una teoría como variables de cierto tipo (o *suerte*) particular, en otra, o como variables restringidas según el procedimiento habitual de ensanchar las cuantificaciones ('Todo es tal que p' pasa a 'Todo ente, x, es tal que, si x es así o asá, p'). En cualquiera de los dos casos —pero desde luego sobre todo en el segundo—, lo que se ha hecho dista de ser anodino o inocuo; así que decir, según es costumbre, que NB es una extensión conservativa de ZF, es en el mejor de los casos inducir a engaño sin querer; porque, a lo sumo, eso podrá decirse para el primer género de traducción, o sea para una de las versiones de NB, la que es presentada como teoría plurisortal (que es lo que hizo Bernays, a diferencia de la presentación originaria de von Neumann).

Es a todos los efectos utilísimo el recurso a ese género de traducciones o proyecciones de una teoría de conjuntos en otra que, en cierto sentido al menos, sea más potente. Abre los horizontes a indagaciones teórico-modélicas interesantísimas: el género de investigaciones de *modelos internos* (*inner models*).

Lo único malo es la interpretación que, quizá torcidamente, puede darse de eso para (mal)responder a un problema filosófico, metafísico, como el recién apuntado del conjunto universal.

Aparte de que NB sólo postula una *clase universal* que abarca únicamente a una fracción infinitesimal de lo existente; ni siquiera se abarca a sí misma, pues sólo abarca a entes más pequeños que ella; en tanto que la clase universal de ML de Quine —aunque no sea del todo universal, que no lo es— sí abarca a muchísimo más, se aproxima más a ser una clase como su propio nombre indica, la Realidad, el conjunto de todo; y, por su parte, NF sí reconoce no sólo la existencia de la Realidad, la clase universal (en este sentido, que hay que distinguir de aquel en que se habla de los universales), sino que, además, reconoce que la Realidad, el conjunto de todo, es efectivamente un conjunto de todo.

¿No tiene entonces un partidario de ZF ninguna manera de tratar de responder a la dificultad metafísica que constituye para su teoría la ausencia necesaria de clase universal?

Si, puede intentar varias salidas. Una es relativizar la relación de abarque. En lugar de un único abarque, habría una cadena infinita de los mismos; y ZF tan sólo daría expresión a uno de esos abarques, abarque_z.

Conque la ausencia de clase universal sería únicamente la inexistencia de un ente que abarque_z (zermelianamente) a todos los entes. Nada excluiría que hubiera otros abarques y que, o bien alguno de ellos fuera compatible con un abarcador universal, o bien con esa serie se tendiera asintóticamente a algo así.

Otra respuesta viable sería la de que un modelo, o mejor una modelización, no tiene por qué comportar un conjunto de todos los entes que intervengan en la modelización, sino tan sólo la existencia de esos diversos entes.

No me parece que estén exentas de graves inconvenientes esas dos salidas. A ambas las veo asediadas por dificultades que me parecen redhibitorias. Pero, por lo menos, son intentos serios de afrontar el desafío más arriba expuesto.

Los partidarios de ZF harán bien, pues, en perseverar en la búsqueda por la vía de algo así como una de esas dos salidas. En espera de lo que nos ofrezcan, parece que, hasta aquí, el balance filosófico sobre el enfoque de los conjuntos en ZF no puede ser positivo.

---

§5.— La Individuación de los Conjuntos y el Principio de Cimentación o: Las Cuitas de un Matemático en Catonia)

Curiosamente, el mejor argumento a favor, si no exactamente de la teoría están dar ZF, siquiera de algo de esa laya, es uno proferido en años más recientes por nada menos que Quine:las variantes de la teoría estándar, al excluir clases exentas de cimentación, brindan un mejor criterio de identidad o individuación de los conjuntos que el que pueden proporcionar las propias teorías de conjuntos de Quine, pues en éstas no se excluyen clases sin cimentación. Ya sabemos que una clase carece de cimentación si es un conjunto que abarca a un conjunto que abarca a un conjunto que..

Las raíces de ese piropo que regala Quine a la teoría estándar son éstas. Quine ha llevado una campaña contra la postulación de *atributos* o *propiedades* entendidos como universales no extensionales; que, si son extensionales, no tiene sentido ninguno diferenciarlos de los conjuntos.

Lo que ha reprochado a esa postulación es que no brinda ningún criterio de identidad o individuación del género de entes así postulado.

Muchos han entendido esa demanda de un criterio de identidad como la exigencia de algo que aporte condiciones, si no necesarias, al menos sí suficientes y, a la vez, más claramente comprensibles, o previamente conocibles, de suerte que sea posible aplicar el criterio en el proceso cognoscitivo.

Quine, sin embargo, ha declinado comprometerse a estar pidiendo tanto. ¡No! Todo lo que pide él es que se ofrezca algún tipo de aclaración de la identidad de los entes postulados en forma de, o bien algún racimo de condiciones suficientes de identidad, o bien alguno de condiciones necesarias, o —mejor— uno de cada cosa (mejor todavía, eso sí, uno de ambos a la vez), o —por lo menos y a falta de eso— aproximaciones a ello. Aproximaciones informativas en general, que no forzosamente en las aplicaciones.

O sea: no se está pidiendo la conocibilidad previa de aquello que sirva de *criterio*, sino meramente que el conocimiento del *criterio* —en ese sentido laxísimo— ayude a entender qué sea o cómo y cuándo se dé la identidad entre entes del género que se quiere postular.

Sólo en eso estriban el impacto y la pretensión del adagio quineano '*No entity without identity*'. Es más: no se excluye que las aclaraciones suministradas acaben girando en un círculo. Como lo señaló en una célebre respuesta Quine —contestando a una interpelación sobre sus resistencias a aceptar la noción de analiticidad—, él no se opone a explicaciones que a la postre giren en un círculo, con tal —eso sí— que de algún modo todo ese proceso circular aporte alguna luz.

Y, no obstante, en los últimos tiempos ha ido cambiando el énfasis de Quine sobre ese punto (y sobre otros). Se ha ido acercando a la teoría estándar, y ha tendido a desestimar sus propias contribuciones teorético-conjuntuales.

Otros motivos lo llevan también a ello, mas el que aquí nos interesa —porque es el que se ha traducido en el argumento evocado al comienzo del presente apartado— es ése de que no se suministra ningún criterio de identidad claro con clases sin cimentación (con clases, p.ej., que se abarquen a sí mismas, pues evidentemente ésas son no-cimentadas).

Mas, ¿por qué no? Si el *criterio* que se está pidiendo es meramente algo como el género de explicaciones que íbamos indicando poco más atrás, entonces todo principio de extensionalidad suministra un criterio. Y Quine no se desdice de eso. Pero ahora recalca algo más. Busca, en lo posible, un criterio en un sentido más fuerte. Lo lleva su preocupación por problemas psicogenéticos —que viene de lejos y alcanzó su apogeo en *The*

Roots of Reference— a preguntarse cómo se llega a elaborar y comprender la noción de conjunto —y, con ello, la de identidad entre conjuntos, por el famoso adagio recién citado.

Y es en ese andar en pos de las raíces, los engendramientos de nuestras adquisiciones cognoscitivas, o simplemente doxásticas, donde empiezan a semejársele a Quine demasiado laxas o modestas sus anteriores demandas. No bastará ya con decir que ^xp=^xq ssi ∀x(p ssi q) —aparte de que ese principio no vale en el sistema ML.

Eso será informativo y aclaratorio, pero puede que no facilite el género de información que es menester en el proceso de aprendizaje de la noción de conjunto. Claro que podría uno aprender primero esa noción con aplicación a clases cimentadas y luego extrapolar. Algo así parece sostener Quine a menudo; pero últimamente ve dificultades aun en eso, ya que la extrapolación correría el riesgo de constituir un salto o una ruptura ilegítima.

Comprendo los escrúpulos de Quine. Y no tengo nada muy satisfactorio o definitivo que ofrecer para ese género de indagación psicogenética. No es que crea que la misma carece de interés o pertinencia; simplemente es algo para lo que los filósofos no solemos estar bien equipados y que me parece estar todavía en mantillas.

En cualquier caso, lo que voy a señalar es que ZF no está en condiciones de ofrecer nada positivo al respecto. Y que la noción de clases no cimentadas, particularmente de clases que se abarcan a sí mismas, es de sentido común.

Que ZF no puede resolver ese problema es un corolario inmediato de las tribulaciones —que expusimos en el Apart. 1— de ese sistema con respecto a los individuos. La existencia de individuos es inconciliable con la versión estándar de ZF. Entiendo por individuos, o entes singulares (me parece preferible llamarlos así), entes que sean:

1º) o bien entes que sólo se abarquen a sí mismos (tal es el sentido que solía dar Quine a ‘individuo’);

2º) o bien entes que abarquen a sus partes, las cuales abarquen a las suyas, etc. —así al infinito o así hasta entes sin partes que sean individuos en el sentido (1);

3º) o bien entes que no abarquen a nada pero difieran de Ø, la clase vacía.

La versión estándar de ZF excluye (3), (2) y (1). Una versión de ZF, como la originaria de Zermelo, que acepte (3), pagará el enorme precio de abandonar el principio de extensionalidad —salvo en una versión aguada y más complicada— y el del potencial —idem—, tener que postular un axioma más (la existencia de Ø); y, peor que todo eso, tener que introducir un predicado monádico primitivo adicional para el que no cabrá aportar dilucidación alguna. Podrá ser ‘*indiv*’, y entonces un conjunto sería un ente, x, tal que fuera falso *indiv*(x); o, al revés, ‘*conj*’, siendo entonces un individuo un ente, x, tal que sea falso *conj*(x). Da igual, desde luego. Ninguno de los dos compromisos «ideológicos» (en el sentido de Quine) nos ayuda a entender mejor la realidad. Cualquiera de ellos es el recurso a un birlibirloque —sólo que ¡no se espere de él otra ganancia que la de permitir que el sistema marche sin negar que hay «individuos», o sea «algos» que no son conjuntos, aunque no sabemos de ellos nada que la teoría nos ayude a conocer!

Pero, además, es sospechosa y hasta espúrea esa dicotomía entre individuos, o entes singulares, y conjuntos. Arranca el modo teorético o sistemático de expresarse del contexto del habla normal, e incluso de la del científico no matemático; en ésta son conjuntos los rebaños, las cordilleras, las dunas, los poblados, los ejércitos, los ajuares, los acervos de datos, etc. Y, no obstante, son también entes espaciotemporales y que sufren y ejercen acción causal.

Por ello paréceme lo mejor identificar a un ente *singular* —en un sentido técnico más restringido— con uno cuyo abarque sea transitivo; así una mesa abarca a sus partes, y a las partes de sus partes, etc. (o bien hasta el infinito, o bien hasta partecillas atómicas cada una de las cuales se abarque tan sólo a sí misma). Mas esta noción de individuo, lo mismo que la de Quine o cualquier otra, es incompatible con ZF. Aunque es muy de sentido común. (Como un ente singular, en esa acepción, es aquel para el que la relación de todo a partes coincide con la relación de conjunto a miembros, un ente así también se abarcará a sí mismo.)

Con lo cual se ganará el poder decir que es un conjunto una duna, e.d. un cúmulo de granos de arena, cada uno de los cuales es un ente singular. Y similarmente para rebaños, ajuares, mobiliarios, enjambres etc.

No son los entes singulares los únicos que, verosímilmente, se abarcan a sí mismos. Lo hace también la clase universal, si existe (en ZF, desde luego, no puede existir). También la clase de todas las clases de más de dos elementos. Etc.

Pero vamos a ver —al margen de ese género de clases— una cuyo descubrimiento revela la quiebra del enfoque iterativo de la «formación» de los conjuntos.

Pongamos que en Catonia estipula la Ley de Impuestos que cualesquiera varios contribuyentes que compartan el mismo domicilio forman, juntos, un cúmulo o conjunto con el mismo domicilio común a sus miembros; y que ese cúmulo es, a todos los efectos, un contribuyente más, a no ser que esté incluido en otro que también sea un contribuyente. Esta última cláusula de reserva está introducida para evitar una excesiva carga fiscal; la de que los cúmulos sean disjuntos beneficiará a pares de parejas que vivan juntas compartiendo no sólo techo sino también un miembro (un bígamo, digamos: Catonia es pluralista e indulgente en materia de costumbres).

En la c/ Cátulo Nº 1, 1º izq., de la capital de Catonia viven Zósimo y Fabián. Al ser promulgada esa ley, empiezan a reflexionar sobre a qué vengan por ella obligados (¿cuántas declaraciones de renta deberán cumplimentar?). Conque, habiéndose hecho un lío, acuden a un vecino, profesor de matemáticas.

Éste cree a pie juntillas en ZF. Les dice:

> Según la versión estándar de ZF no existís; pero voy a retrotraerme a la versión originaria de Zermelo (modificando, pues, los axiomas del potencial y de extensionalidad, postulando el axioma de existencia de Ø, y acuñando el predicado primitivo, sin extensión, '*conj*'). Pues bien, como sois individuos, y los individuos no tienen miembros (no abarcan a nada), cada uno de vosotros es, desde luego, disjunto de cualquier cosa, conjunto o no conjunto. Juntos formáis un conjunto, {Zósimo,Fabián}, que será un contribuyente salvo si se demuestra que está incluido en otro contribuyente. Pero, ¿por qué iba a estarlo? Como uno cualquiera de vosotros, p.ej. Zósimo, es disjunto de cualquier ente, será disjunto del conjunto recién formado; luego otro contribuyente será {{Zósimo,Fabián}, Zósimo}; que este conjunto ni incluye al anterior ni está incluido en él; similarmente otro contribuyente será {{Zósimo,Fabián}, Fabián}, por idéntica razón. Y, para cada uno de los contribuyentes construidos hasta un momento dado de esa manera, *c*, habrá otros dos contribuyentes, {*c*,Zósimo} y {*c*,Fabián}. Luego estáiss en c/ Cátulo 1, 1º izq.

infinidad de contribuyentes. Os toca, pues, cumplimentar un número infinito de declaraciones de renta.

Los infelices Zósimo y Fabián, al oír eso, deciden, desconsoladamente, poner fin a su vida en común.

¿Qué hubiera podido decírseles desde otra perspectiva? En primer lugar que un ente singular es el conjunto de sus partes, incluido él mismo entre ellas. Conque Zósimo no es disjunto de {Zósimo,Fabián}. Pero vamos a suponer, no obstante, que sí lo sea; vamos a suponer que un cuerpo es el cúmulo de sus partes propias, o sea de las partes suyas no totales. Así y todo, hay otra posibilidad; y es la de que exista un cúmulo *c* = {Zósimo,Fabián,*c*}. Como ese cúmulo no es disjunto ni de {*c*,Zósimo} ni de {*c*,Fabián}, sino que éstos están incluidos en *c* —al igual que también está incluido en *c* {Fabián,Zósimo}—, resulta, no sólo que ninguno de esos otros cúmulos es un contribuyente —si lo es *c*— sino que además —nuevamente suponiendo que *c* sea un contribuyente— ninguno de ellos, *d*, será tal que {*c*,*d*} tenga que ser un contribuyente.

Por consiguiente, como no puede haber una infinidad de contribuyentes en un domicilio (el Estado se arruinaría proporcionando, sin fin, formularios para declaración de renta), lo único sensato es pensar que existe *c* y que *c* abarca sólo a Fabián, a Zósimo y al propio *c*.

Ese cúmulo, *c*, es, pues, lo que suele decirse en Catonia ‘ambo et uterque’, ambos individuos unidos por el enlace más el enlace entre ellos y consigo mismo. (Si se quiere, tendrán que estampar tres firmas: cada uno la suya por separado y una tercera hecha juntos.) El Fisco recibirá, pues, únicamente tres declaraciones de renta de c/ Cátulo 1, 1º izq. En beneficio de todos, pero con especial solaz de Fabián y Zósimo. (Vide infra, final del apartado siguiente.)

---

§6.— La Lógica Combinatoria

Constituye la lógica combinatoria un intento de alternativa bastante radical en la concepción de los conjuntos.

Clásicamente se distingue un conjunto, x, de su función característica, e.d. de la función f tal que para cualquier ente, z, f(z)=1 (la Verdad) si z viene abarcado por x, y, si no, f(z)=0 (la Falsedad).

Para entender la lógica combinatoria conviene identificar a cada conjunto —o, digamos mejor, a cada determinación— con su función característica; con una diferencia, y es que ha de desecharse esa bivalencia de la función característica, a favor de una plurivalencia, quizá infinita.

En lógica clásica hay una frontera absoluta, categorial, entre entes denotables (o *representables* o lo que sea) por oraciones o fórmulas, y otros géneros de entes. En lógica combinatoria, no.

Categorialmente no hay fronteras. (Lo cual no excluye que haya diferencias; pero no categoriales, o sea: no tales que lo que tenga sentido afirmar o negar de un ente de una de las categorías no lo tenga de uno de otra categoría.)

Así pues, cada ente puede ser considerado como un individuo, y como un conjunto, y como un hecho o estado de cosas. Si se quiere, un mismo signo puede ser leído, según los contextos, como un nombre y como una oración; en el segundo caso, añadiéndose el verbo (sobreentendido) 'es verdadero' (o, quizá, 'existe', si identificamos la verdad ontológica con la existencia).

Conque nuestra sintaxis combinatoria autorizará como signo cualquier concatenación de signos. Y cada signo será una oración, una fórmula bien formada.

Una lógica combinatoria tendrá entre sus signos primitivos unos combinadores; un combinador será un signo '#' que, prefijado a un cierto número de signos 'p', 'q','r',…, constituirá una fórmula demostrablemente equivalente a otra en la que ya no esté esa ocurrencia inicial de '#' y, en cambio, sólo aparezcan combinaciones, directas o indirectas, de esos otros signos 'p','q','r',… (no forzosamente de todos ellos).

(Las equivalencias en cuestión valdrán o bien irrestrictamente, para cualesquiera signos 'p', 'q', 'r'…, o bien —que es lo que sucede más a menudo en CD— con determinadas restricciones.)

Un modo muy elegante de introducir los combinadores es postular como primitivos tan sólo dos: Σ y Λ. Σ será tal que para (todos o muchos) p,q,r: Σpqr=pr(qr).

(Nuestras fórmulas son asociativas hacia la izquierda: 'abc' abrevia a '(ab)c'.)

Λ será tal que, para cualesquiera p, q: Λpq=p.

Con esos dos se definen éstos otros:

Δ (tal que Δpqr = p(qr));

Γ (tal que Γpqr = prq);

Ω (tal que Ωpq = pqq);

ε (tal que εpq= qp);

1 (tal que 1p=p :1 es la Verdad, o la Existencia; que, por cierto, resulta ser lo mismo que la relación de abarcar.

Σ es un operador de *voz media* (p.ej. si x=desear, u=tener éxito, z=Macario, entonces Σxuz es el hecho de que Macario se desea éxito —o sea que desea su propio éxito).

Ω es un *reflexivizador directo*. ε es la pertenencia. Γ es el *conversor*. Y Δ es el asociador.

Definimos luego qué sea, con respecto a una fórmula dada cualquiera, r, y a otra fórmula, p, el abstractor de r respecto de p, λrp. Que será esto: si r=p, entonces λrp=1; si r no tiene ocurrencias en p, entonces λrp=Λp. Si no se da ninguno de esos dos casos, sino que p es una concatenación sq, que contiene alguna ocurrencia de r, entonces λrp = Σλrsλrq.

Si valieran sin restricción todos los principios que se acaban de estipular, la lógica combinatoria que estamos construyendo entronizaría un principio irrestricto de abstracción. En efecto, probaríase que para cualesquiera ente r y determinación λrp (la determinación de ser un ente tal que p, o el cúmulo de los entes que p), valdría la siguiente ecuación λrpr=p (o sea el que la determinación de ser tal que p abarque a r es lo mismo que el que sea verdad que p). Y de ahí deduciríase la paradoja de Russell.

Hay lógicas combinatorias que tienen ese principio irrestricto de abstracción, acompañado del principio irrestricto de comprensión. Una de ellas es el sistema Q de Fitch. Sólo que en éste la negación no es clásica. No vale en su sistema el principio de tercio excluso. Así, aunque se demuestra en el mismo que R (que abrevia a $\lambda r N(rr)$ —donde 'N' es la negación, 'no') es tal que: RR=N(RR), sin embargo no se sigue de ahí ni que RR ni que N(RR); porque en tal sistema no vale la inferencia $p{=}Np \vdash p\wedge Np$. (El signo '$\wedge$' denota la conyunción (copulativa).)

Aunque sistemas como ése de Fitch me parecen constituir pasos adelante extremadamente valiosos, y aunque es desde luego considerable la ventaja que comportan de reconocer a la vez, irrestrictos, ambos principios, el de comprensión y el de abstracción, sospecho, sin embargo, que es demasiado elevado el precio, o sea el sacrificio del principio de tercio excluso.

Además, si tratamos de articular una teoría que dé cabida a lo difuso, ¿no será preferible, en lugar de abandonar el principio de tercio excluso, optar por un enfoque paraconsistente con tercio excluso, con no-contradicción, pero sin regla de Escoto (a saber: $p, Np \vdash q$)?

Más exactamente, en lugar de tener una sola negación, tener dos: una débil y otra fuerte o clásica. A cambio, habrá que restringir alguna de las dos ecuaciones precedentes (acerca de Λ y de Σ) con una serie de cortapisas. De esa manera resulta un sistema, el cálculo de determinaciones CD, que he expuesto con detalle técnico en otro lugar (en «Consideraciones filosóficas sobre la teoría de conjuntos: II», *Contextos* Nº 12, Universidad de León, 1989).

Ya para terminar este articulo, voy a enumerar algunos de los rasgos de ese sistema.

1) Estriba la diferencia entre las dos negaciones —la simple o natural, 'N', leída 'no' a secas, y la fuerte o supernegación, '$\neg$', leída 'no… en absoluto' o 'es del todo falso que'— en que para la primera valen estas leyes (donde '$\rightarrow$' es la implicación que se lee 'sólo en la medida en que', '$\supset$' es el condicional, que se lee 'sólo si', '$\vee$' la disyunción y '$\wedge$' la conyunción; '$\leftrightarrow$' es la equivalencia: 'en la misma medida en que'): son teoremáticos los esquemas:

$p\vee Np$, $N(p\wedge Np)$, $p\vee q\leftrightarrow N(Np\wedge Nq)$, $p\wedge q\leftrightarrow N(Np\vee Nq)$, $p\leftrightarrow NNp$, $p\rightarrow q\leftrightarrow(Nq\rightarrow Np)$.

No lo son, en cambio:

$p\supset q\supset(Nq\supset Np)$, $p\wedge Np\supset q$, $p\supset(Nq\supset p)$.

Al paso que para la segunda valen estos esquemas teoremáticos:

$p\supset q\supset(\neg q\supset\neg p)$, $p\supset(\neg p\supset q)$, $\neg p\supset(p\supset q)$, $p\supset\neg\neg p$, $\neg\neg p\supset p$, $p\vee\neg p$, $\neg(p\wedge\neg p)$, $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$, $\neg p\wedge\neg q\leftrightarrow\neg(p\vee q)$.

Mas no valen éstos (no son teoremáticos):

$p\leftrightarrow\neg\neg p$ (sí vale $p\rightarrow\neg\neg p$, pero no el recíproco), $p\vee q\leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg Fq)$ (vale la implicación del miembro derecho por el izquierdo, mas no la inversa), $p\wedge q\leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)$ (idem). '$\neg$' es, en suma, la negación clásica.

2) En CD vale la mitad implicativa del esquema de abstracción, a saber: $\lambda rpr \rightarrow p$. Vale incluso otra versión más fuerte de esa *mitad implicativa* de tal principio, a saber: $\lambda rpr \supset (\lambda rpr \leftrightarrow p)$.

3) En CD valen muy numerosos y diversos casos del esquema recíproco al anterior, o sea muy diversos casos del esquema equivalencial de abstracción $\lambda rpr \leftrightarrow p$. La axiomática de CD es la de un sistema abierto, inacabado, susceptible de enriquecerse con ulteriores aproximaciones al esquema general de abstracción.

4) En CD vale el esquema de comprensión con sólo una restricción. Formúlase así tal esquema: Existe λrp o bien $\lambda rp=0$ (donde '0' es una constante definida que no denota nada —o, si se quiere, que denotaría la Falsedad absoluta).

5) En CD vale una regla de extensionalidad generalizada o debilitada que es ésta (las variables vienen introducidas en CD como signos definidos): $xz \leftrightarrow uz \wedge (x0 \leftrightarrow u0) \vdash x=u$. (Si es menester el segundo conyunto de la premisa es porque una determinación es algo que, cuando se le da un argumento, algo existente, le hace corresponder un valor, o ninguno, mientras que, cuando va a *tomar* argumento sin que nada le venga dado a titulo de tal, entonces puede que por sí misma, espontáneamente, haga corresponder, a tal (o ante tal) falta de argumento, un cierto valor.

Por eso, en CD no existe ningún cúmulo absolutamente nulo, o sea $\Lambda 0$ ($=\lambda x(0)$) es absolutamente inexistente (es $=0$). Lo cual, dicho sea de paso, constituye una gran ventaja, pues un cúmulo o conjunto absolutamente vacío es algo que sólo sugestionándose llega uno a aceptar. Como lo dice Geach (en ***Logic Matters***, p.231):

> Ahora bien, si una clase es constituida como teniendo ciertos miembros, ¿cómo podemos llegar a una sin ningún miembro, como habría de serlo la extensión de cualquier concepto vacío? La clase nula vino introducida en lógica por Boole y Schroeder con documentación falsa, como la clase a la que nos referimos al usar la palabra 'nada'; demasiado a menudo los libros modernos de lógica orillan la dificultad con una mezcla de sofística y trampantojo. Si usamos 'clase' y 'miembro' en su sentido ordinario, no puede haber ninguna clase carente de miembros.

Desde luego no es decisivo ese argumento. Y, por otro lado, mayor será su fuerza si la concepción de conjunto que tenga uno es *extensivista*, en la vecindad de la conjuntacional (que es lo que aspira a hacer la teoría estándar, con su «concepción iterativa»). Así y todo, para cualquier concepción de conjunto, la clase absolutamente nula es un engorro.

6) Pueden definirse en CD traducciones de sistemas clásicos, como ZF. Sin embargo, sendas traducciones de tales esquemas no son siempre teoremáticas en CD. Pueden, no obstante, postularse como axiomas adicionales, aunque únicamente para algunas de esas traducciones, no para otras.

7) CD es una teoría axiomática de conjuntos difusos; la cual puede contribuir a encontrar mejores soluciones para los sorites (la paradoja del montón y otras de la misma índole) que las que, tan estipulativamente arbitrarias, quieren imponerse desde la lógica clásica: si un cúmulo de $99!^{99}$ granos es un montón, y, cuando un cúmulo de n granos es un montón, también lo es uno de n-1 granos, entonces hasta un cúmulo vacío (la clase nula) será un montón. Respuesta: no hay clase absolutamen-

te nula (vide supra, (5)); por lo demás el razonamiento es correcto: hasta un cúmulo de un grano es un montón. Pero de que lo sea no se sigue que lo sea en tal o cual grado determinado —ni, menos, que lo sea en una medida total, del 100%—, sino sólo eso: que lo es, punto; que lo es, acaso, tan sólo en una medida infinitesimal. Porque, 'si p, entonces q' es verdad con tal que o p sea del todo falsa o q sea verdadera (en la medida que sea). El *modus ponens* ($p\supset q$, $p \vdash q$) no conserva el grado de verdad de las premisas —o, más precisamente, no conserva el grado de verdad de la segunda premisa, la *menor*—, sino que tan sólo conserva la calidad misma de verdad.

8) Una interpretación «intuitiva» de CD seguiría pautas como las siguientes. Identificamos una relación con su dominio; y, para un ente de ese dominio, x, y una relación r, rx será la imagen por r del cúmulo {x}, e.d. será el cúmulo de entes con los que guarde x la relación r. (Así, si i es la identidad, ix será el cúmulo de entes idénticos a x, o sea el síngulo de x; una determinación, pues, que sólo tiene el propio x.) Una *determinación intranseúnte*, no (propiamente) relacional, será entonces un cúmulo z tal que para cualquier ente x: zx (el venir abarcado x por z) será un cúmulo que sólo se abarque a sí mismo (cada uno vive su vida, muere su muerte, anda su caminar, etc.: *acusativo interno*). Cada ente viene identificado con su propia existencia: 1x=x. (O sea, también, con su propio abarcar, e.d. con el cúmulo de cosas por él abarcadas.)

9) CD no es un sistema recursivamente axiomatizable. (Por lo tanto, y en virtud del teorema de Craig: su axiomática no es recursivamente enumerable.) Débese eso a ciertos postulados disyuntivos de la forma 'Para cualquier fórmula p , o … p es un teorema, o, si no, ---p es un teorema', con determinados signos en lugar de esos puntos suspensivos y guiones.

Así pues, CD no está en el campo de aplicación del teorema de Gödel de incompletabilidad de sistemas que contengan la aritmética.

10) En CD vale el axioma de elección para un cúmulo, *B*, que incluye no sólo a ω (el cúmulo de números naturales), sino a algo que es, probablemente —aunque aquí estoy sólo conjeturando— un cúmulo, cuya cardinalidad es un punto fijo para la función $\aleph$ de números cardinales cada uno de los cuales es, también él, un punto fijo de esa función (o un punto fijo de la función $\beth$ si es que ambas son idénticas como lo dice la hipótesis generalizada del continuo). Dicho cúmulo, *B*, viene en CD reconocido como bien ordenado; y, además, como un cúmulo todos cuyos miembros y subcúmulos son entes insegregables, o sea: entes, r, que, con respecto a cualquier cúmulo λrp, cumplan la ecuación λrpr=p; además, uno de los postulados de CD afirma que, o bien p es un combinador (en el sentido de esa palabra definido más arriba, a comienzos del tercer párrafo del presente apartado) o, si no, p es un ente insegregable sólo si también es un cúmulo universalmente agregativo, e.d. un cúmulo λrp tal que, para cualquier r, λrpr=p. Tanto los miembros como los subcúmulos de *B* son universalmente agregativos.

11) Los números naturales vienen definidos en CD como combinadores especiales. 0, el número cero, es un combinador tal que, para cualesquiera entes, x, z: 0xz=z. 1, el número uno, es la Existencia o Verdad, o sea: 1x=x (y, por ende, 1xz=xz). 2 = λxz(x xz); conque 2x = λz(x xz). 2(ser-bello) es la determinación de ser un ente

cuya belleza sea bella (algo que, seguramente, poseen —aunque no en la misma medida quizá— cuantos entes posean belleza); 2i será la relación entre un ente dado y su síngulo (2ix será, pues, el síngulo del síngulo de x). 3z = λu(z z(zu)): si z es la relación de producir efectos o consecuencias causales, entonces 3z será una relación que guarde un hecho con otro si éste es (conjuntamente) producido por el cúmulo de efectos (conjuntamente) producidos por el cúmulo de efectos producidos por el primer hecho. Y así sucesivamente. (La negación natural, N, es un ente tal que para todo número natural non, n, nN=N; para todo número natural par o cero, m, mN=1.)

12) En CD demuéstrase que (fuera de *B*) existen cúmulos no universalmente agregativos y existen cúmulos segregables; en particular un cúmulo que se segrega (de sí mismo) a sí mismo, a pesar de cumplir la condición de pertenencia a sí mismo: el cúmulo fuertemente russelliano, R, o sea λr¬(rr). Es tal que ¬(RR), mas de ninguna manera (en ningún grado) RR. Pero, en cambio, por lo que hace a entes denotados por expresiones en las que no figuren ni '¬' ni '→' ni ninguna ocurrencia del cuantificador '∀', demuéstrase que tales entes son insegregables y, por lo tanto, si no son combinadores (vide supra, final del punto 10), también universalmente agregativos. Uno de ellos es el originario de Russell, λxN(xx), que se abarca y no se abarca a sí mismo. (Y que también abarca, por cierto, a R; es más: lo hace en medida total, plenamente.)

13) En CD el cúmulo de los entes que p es siempre el mayor de aquellos cúmulos que sólo abarquen entes que p.

14) Existe en CD un cúmulo absolutamente universal: Λ1 (que es =λx(1)): es un cúmulo tal que para cualquier r el abarcar a r ese cúmulo es la Verdad absoluta. Por consiguiente, si CD es coherente (no delicuescente), tiene modelos; si es una teoría verdadera, uno de tales modelos es la Realidad; y puede dentro de CD formularse una teoría de modelos apropiada para CD —que era una de las tareas de las que se revelaba incapaz la teoría estándar.

15) Además de relajar la extensionalidad clásica mediante el principio de *intensividad* (que viene recogido en la versión de la regla de extensionalidad válida en CD —vide punto 5, más arriba— y que cabe expresar así: cuenta para la identidad o individuación de un cúmulo no sólo qué cosas abarque sino también cuánto abarque, o deje de abarcar, a cada una de ellas), también relaja y matiza CD la extensionalidad clásica mediante una cierta intensionalidad, a saber: teniendo un operador (tensorial) 'B', que cabe leer 'Es afirmable con verdad que' o 'Es verdad en todos los aspectos que', que es similar al operador de necesidad clásico en un sistema modal normal fuerte como S5, pero con esta diferencia: la regla de Gödel ($p \vdash Bp$) vale irrestrictamente en CD, al paso que en el sistema clásico S5 esa regla sólo vale para premisas que se hayan demostrado como axiomas en el sistema. En CD, en cambio, no es irrestrictamente válido el metateorema de la deducción (porque $p \vdash Bp$ y, sin embargo, no es teoremático el esquema '$p \supset Bp$'). Por eso mismo, he formulado para CD una regla y no un axioma de extensionalidad. (Pero es demostrable en CD el teorema de extensionalidad en esta versión mitigada o moderada, a saber —siendo '∀' el prefijo del cuantificador universal y '∃' el del existencial—:

$$\forall x,y\exists z(B(xz\leftrightarrow yz\wedge(x0\leftrightarrow y0)\supset(x=y)).)$$

La identidad de los cúmulos o determinaciones depende, pues, de qué abarquen, cuánto y en qué aspecto lo hagan. (En particular, podemos considerar que los lapsos de tiempo son algunos de esos aspectos de lo real. Conque dos cúmulos pueden compartir sus miembros, incluso en la misma medida el uno que el otro, en un momento, sin ser idénticos. Y un cúmulo puede tener diversos miembros en períodos diferentes. Aparte de que —¡recordémoslo!— cuentan también los grados de abarque.

16) En CD vale también esta otra enunciación, también a veces denominada —en su versión clásica, más fuerte— ‘principio de extensionalidad’ (que, sin embargo, no es teoremática —ya lo dije en el apartado anterior— en el sistema de Quine ML): $B(\forall x(p\leftrightarrow q)\wedge(r\leftrightarrow s))\supset(\lambda xp=\lambda xq)$ donde r, s, difieren, respectivamente, de p, q, sólo por reemplazo de las ocurrencias libres de ‘x’ por sendas ocurrencias de ‘0’.

17) En CD no puede (aparentemente) probarse en forma general el teorema de Cantor, aunque si se prueba para cada cúmulo abarcado o incluido por el cúmulo *B*. (Se prueban, si, algunas versiones restringidas generales del teorema de Cantor; p.ej. pruébase una versión que se aplica a cada cúmulo cuyo potencial sea universalmente agregativo.)

18) No todo acerca de CD son ventajas. Comparando a ese sistema con ZF resaltan dos cosas. La primera es que CD es muchísimo más complicado. La segunda es que es, también, más arriesgado, menos garantizado contra la delicuescencia (o Post-inconsistencia); menos, porque tales garantías, según se desprende del teorema de Gödel, son siempre sólo relativas (y se dan por grados).

A cambio de eso están los beneficios que proporciona CD. P,ej., a cambio de las complicaciones de la teoría lógica, puédese obtener una simplificación de la teoría científica (y no científica) global; en verdad, con ZF no hay prácticamente cómo aplicar la teoría lógico matemática a nada, salvo encogiéndose de hombros ante lo que dice literalmente la propia teoría (en una actitud ficcionalista). Por otro lado, el grado de peligrosidad de una teoría (lo arriesgado que sea, afirmándola, arrimarse al precipicio de la delicuescencia) suele ser directamente proporcional al interés de la teoría. Como lo he mostrado en otro lugar —coincidiendo con muchos autores (K. Lehrer etc.)— el propósito que más hay que abrazar no es el de evitar (minimalizar) el error, sino el de maximalizar el saber (minimalizar la ignorancia).

19) Para concluir, un punto jocoso. La hipótesis contemplada al final del Apartado precedente de un cúmulo *c* = {*c*, Zósimo, Fabián} es formulable y no refutable en CD (aunque desde luego tampoco demostrable, a menos que CD sea delicuescente, Post-inconsistente). Definamos ‘*c*’ como ‘$\lambda x\exists y(\forall z(($z=Fabián $\vee$ z=Zósimo $\vee$ z=y$)\wedge$yx$)$’ —o sea: la determinación de pertenecer a un cúmulo que sólo abarque: a Fabián, a Zósimo y a sí mismo. Supuesto que Fabián y Zósimo son ambos ⧺ *c* (eso sería fácil de constatar), entonces, si se da la premisa de que *c* se abarca a sí mismo, dedúcese que *c* es exactamente {*c*, Fabián, Zósimo}. (Sin esa premisa no se puede demostrar que *c* abarca a Zósimo o a Fabián.) Conque, si bien es sin duda mejorable la legislación de Catonia, no habrá, en ese asunto, ningún motivo puramente lógico para exigir la abrogación de la ley de impuestos; aunque, por otro lado, ni siquiera ese recurso sería menester, puesto que ni Fabián ni Zósimo serán disjuntos de {Fabián, Zósimo}.